SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

<u>ĐỀ CHÍNH THỨC</u>

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP THÀNH PHỐ
LỚP 9 – THCS (NĂM 2013 – 2014)
MÔN TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút
Ngày thi: 19/3/2014

<u>Bài 1:</u> (3 điểm) Cho hai số dương a, b và c khác 0 thỏa điều kiện: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$

Chứng minh rằng: $\sqrt{a+b}=\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}$

<u>Bài 2:</u> (5 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)=3x^2$

b) $2\sqrt{2+x-x^2}=1+\frac{1}{x}$

<u>Bài 3:</u> (3 điểm) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} xy-\dfrac{x}{y}=9,6 \\ xy-\dfrac{y}{x}=7,5 \end{cases}$$

<u>Bài 4:</u> (3 điểm) Cho số thực x thỏa mãn điều kiện: $0<x<\frac{1}{2}$ **. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:**

$$A=\frac{2-x}{1-2x}+\frac{1+2x}{3x}$$

<u>Bài 5:</u> (4 điểm) Từ một điểm M bên ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với (O), (A, B là các tiếp điểm). Gọi E là trung điểm của MB; C là giao điểm của AE và đường tròn (O) (C khác A) và H là giao điểm của AB và MO.

a) Chứng minh: HCEB là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi D là giao điểm của MC và đường tròn (O) (D khác C). Chứng minh: ABD là tam giác cân.

c) Gọi J là giao điểm của BO và đường tròn (O) (J khác B); K là giao điểm của AD và MJ. Tính tỉ số $\frac{KA}{KD}$

<u>Bài 6:</u> (2 điểm) Tìm tất cả các số tự nhiên n biết n có hai chữ số và n chia hết cho tích các chữ số của nó.

★ HẾT ★

THĂNG LONG

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP THÀNH PHỐ
LỚP 9 – THCS (NĂM 2013 – 2014)
MÔN TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút
Ngày thi: 19/3/2014

Đáp Án

Bài 1: **(3 điểm) Cho hai số dương a, b và c khác 0 thỏa điều kiện:** $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$

Chứng minh rằng: $\sqrt{a+b}=\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}$

Hướng dẫn:

Ta có: $a>0;\ b>0;\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0;\ a+c\ge 0; b+c\ge 0$

Do đó: $\frac{1}{c}=-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)<0\Rightarrow c<0$

Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0\Rightarrow bc+ac+ab=0\Rightarrow c^2=c^2+bc+ac+ab$

$\Rightarrow c^2=c(c+b)+a(c+b)\Rightarrow c^2=(a+c)(b+c)\ \Rightarrow -c=\sqrt{(a+c)(b+c)}$

$\Rightarrow 2\sqrt{(a+c)(b+c)}+2c=0\Rightarrow a+b=a+c+2\sqrt{(a+c)(b+c)}+b+c$

$\Rightarrow a+b=\left(\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}\right)^2\Rightarrow \sqrt{a+b}=\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}$

Bài 2: **(5 điểm) Giải các phương trình sau:**

a) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)=3x^2\Leftrightarrow (x+1)(x+6)(x+2)(x+3)=3x^2$

$\Leftrightarrow (x^2+7x+6)(x^2+5x+6)=3x^2\Leftrightarrow (x^2+6x+6+x)(x^2+6x+6-x)=0$

$\Leftrightarrow (x^2+6x+6)^2-x^2=3x^2\Leftrightarrow (x^2+6x+6)^2=4x^2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+6x+6=2x\\x^2+6x+6=-2x\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+4x+6=0\\x^2+8x+6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x+2)^2+2=0\\(x+4)^2=10\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in\varnothing\\x+4=\pm\sqrt{10}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\sqrt{10}-4\\x=-\sqrt{10}-4\end{array}\right.$

Vậy $S=\left\{\sqrt{10}-4;-\sqrt{10}-4\right\}$

b) $2\sqrt{2+x-x^2}=1+\frac{1}{x}$ (1) (điều kiện: $2+x-x^2\ge 0$)

$\Rightarrow 2\sqrt{2-x+2x-x^2}=\frac{x+1}{x}\Rightarrow 2\sqrt{(x+1)(2-x)}=\frac{x+1}{x}\Rightarrow 4(x+1)(2-x)=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$

$\Rightarrow (x+1)(4x^3-2x^2-6x^2+3x-2x+1)=0\Rightarrow (x+1)(2x-1)(2x^2-3x-1)=0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\frac{1}{2}\\2x^2-3x-1=0\end{array}\right.\qquad(*)$$

Giải phương trình: $2x^2-3x-1=0$; $\Delta=9+8=17; x_1=\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}; x_2=\dfrac{3-\sqrt{17}}{4}$

Do đó: $(*)\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1\\ x=\dfrac{1}{2}\\ x=\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}\\ x=\dfrac{3-\sqrt{17}}{4}\end{array}\right.$ $(**)$ **Lần lượt thay x ở (**) vào phương trình (1) khi đó ta có:**

$x=-1; x=\dfrac{1}{2}; x=\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}$ **là nghiệm của phương trình (1)**

Vậy $S=\left\{-1;\dfrac{1}{2};\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}\right\}$

<u>Bài 3:</u> (3 điểm) Giải hệ phương trình:

$\begin{cases} xy-\dfrac{x}{y}=9,6\,(1)\\ xy-\dfrac{y}{x}=7,5\,(2)\end{cases}$ **Điều kiện:** $x\neq 0; y\neq 0$

Ta có: $\left(xy-\dfrac{x}{y}\right)-\left(xy-\dfrac{y}{x}\right)=9,6-7,5\Rightarrow\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}+2,1=0$

$\Rightarrow\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+2,1\left(\dfrac{x}{y}\right)-1=0\Rightarrow\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-0,4\left(\dfrac{x}{y}\right)+2,5\left(\dfrac{x}{y}\right)-1=0$

$\Rightarrow\left(\dfrac{x}{y}-0,4\right)\left(\dfrac{x}{y}+2,5\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{y}=0,4\\ \dfrac{x}{y}=-,25\end{array}\right.$

<u>TH1:</u> $\dfrac{x}{y}=0,4;(1)\Rightarrow xy=9,6+\dfrac{x}{y}=10$

$x^2=\dfrac{x}{y}.xy=0,4.10=4\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm 2$

- **Với x = 2 thì** $\dfrac{2}{y}=0,4\Leftrightarrow y=5$
- **Với** $x=-2$ **thì** $\dfrac{-2}{y}=0,4\Leftrightarrow y=-5$

<u>TH2:</u> $\dfrac{x}{y}=-2,5;(1)\Rightarrow xy=9,6+\dfrac{x}{y}=7,1$

$x^2=\dfrac{x}{y}.xy=-2,5.7,1=-17,75\Leftrightarrow x^2=-17,75\Leftrightarrow x\in\varnothing$

Vậy nghiệm (x;y) của hệ phương trình là $(2;5);(-2;-5)$

THĂNG LONG

Bài 4: **(3 điểm) Cho số thực x thỏa mãn điều kiện: $0 < x < \frac{1}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:**

$$A = \frac{2-x}{1-2x} + \frac{1+2x}{3x}$$

Cách 1: ***Dùng bất đẳng thức***

Ta có: $0 < x < \frac{1}{2}$**. Do đó:** $1-2x > 0; 3x > 0$

Áp dụng BĐT Cô – si cho hai số dương, ta được:

$$A = \frac{2-x}{1-2x} + \frac{1+2x}{3x} = \frac{4-2x}{2(1-2x)} + \frac{1+2x}{3x} = \frac{(1-2x)+3}{2(1-2x)} + \frac{1+2x}{3x}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2(1-2x)} + \frac{1}{3x} + \frac{2}{3} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{1-2x} - 1\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} - 2\right) + \frac{10}{3}$$

$$= \frac{3x}{1-2x} + \frac{1-2x}{3x} + \frac{10}{3} \ge 2\sqrt{\frac{3x}{1-2x} \cdot \frac{1-2x}{3x}} + \frac{10}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\Leftrightarrow A \ge \frac{16}{3}$$

Dấu "=" xảy ra $\frac{3x}{1-2x} = \frac{1-2x}{3x} \Leftrightarrow 3x = 1-2x \Leftrightarrow 5x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{16}{3}$ **khi** $x = \frac{1}{5}$

Cách 2: ***Dùng miền giá trị:***

$$A = \frac{6x - 3x^2 + 1 - 4x^2}{3x(1-2x)} = \frac{-7x^2 + 6x + 1}{-6x^2 + 3x} \Rightarrow -6Ax^2 + 3xA = -7x^2 + 6x + 1$$

$$\Rightarrow (6A-7)x^2 - (6-3A)x + 1 = 0$$

$$\Delta = (6-3A)^2 - 4(6A-7) = 36 - 36A + 9A^2 - 24A + 28 = 9A^2 - 60A + 64 \ge 0$$

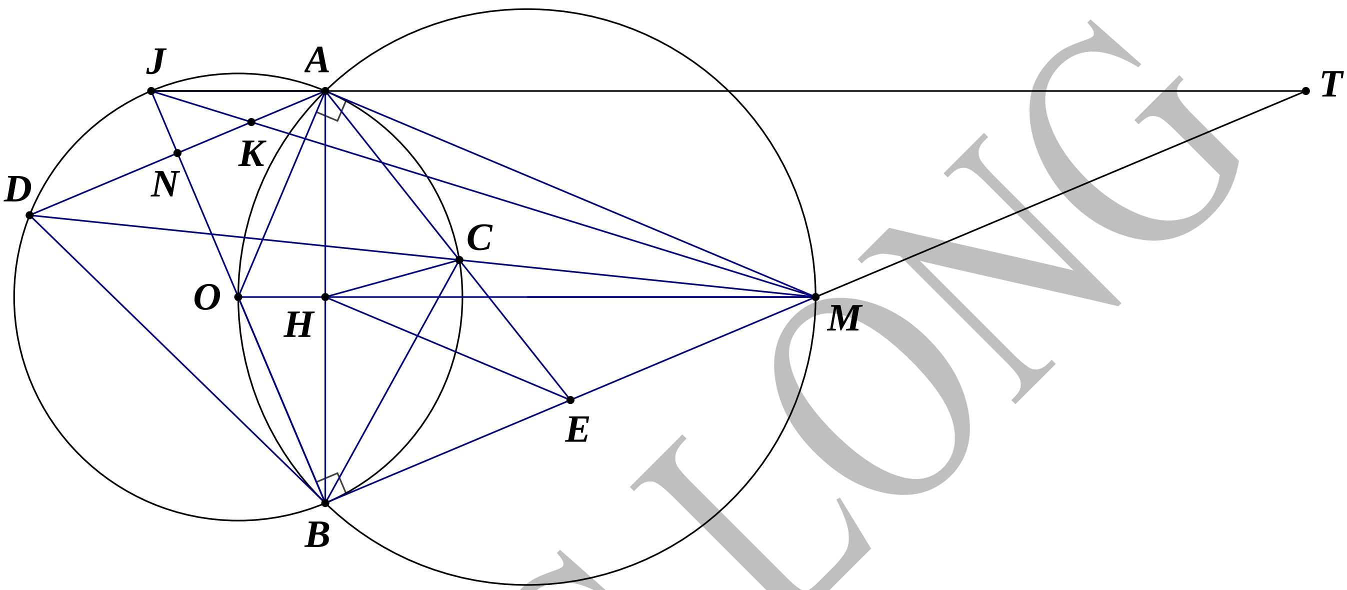
$$\Rightarrow (3A)^2 - 2.3A.10 + 100 - 36 \ge 0 \Rightarrow (3A-10)^2 \ge 36$$

$$\Rightarrow 3A - 10 \ge 6 \text{ hay } 3A - 10 \le -6 \Rightarrow A \ge \frac{16}{3}; A \le \frac{4}{3}$$

Bài 5: **(4 điểm) Từ một điểm M bên ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với (O), (A, B là các tiếp điểm). Gọi E là trung điểm của MB; C là giao điểm của AE và đường tròn (O) (C khác A) và H là giao điểm của AB và MO.**

a) **Chứng minh: HCEB là tứ giác nội tiếp.**
b) **Gọi D là giao điểm của MC và đường tròn (O) (D khác C). Chứng minh: ABD là tam giác cân.**
c) **Gọi J là giao điểm của BO và đường tròn (O) (J khác B); K là giao điểm của AD và MJ. Tính tỉ số $\frac{KA}{KD}$**

THĂNG LONG



a) Chứng minh: HCEB là tứ giác nội tiếp.

Ta có: MA , MB là các tiếp tuyến của đường tròn (O)

$\Rightarrow$ MA = MB; MO là tia phân giác của AMB

ΔMAB cân tại A, MO là đường phân giác. Nên MO là đường cao của ΔMAB

ΔHBM vuông tại H, HE là đường trung tuyến. $\Rightarrow HE = BE$ $\Rightarrow \Delta HBE$ cân tại E.

$\Rightarrow HBE = BHE$

Xét ΔEBC và ΔEAB, ta có:

$$\begin{cases} BEC \text{ chung} \\ EBC = EAB\left(\text{góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn BC của (O)}\right) \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta EBC \backsim \Delta EAB(g-g)$ $\Rightarrow BCE = ABE$. Mà $\Rightarrow BCE = ABE$. Nên $BCE = BHE$

$\Rightarrow$ Tứ giác HCEB nội tiếp.

b) Gọi D là giao điểm của MC và đường tròn (O) (D khác C). Chứng minh: ABD là tam giác cân.

Ta có: $\dfrac{EB}{EA} = \dfrac{EC}{EB}\left(\Delta EBC \backsim \Delta EAB\right)$ Mà $EB = EM$ (E là trung điểm của MB)

Nên $\dfrac{EM}{EA} = \dfrac{EC}{EM}$

Xét ΔECM và ΔEMA, ta có:

THĂNG LONG

$\begin{cases} CEM \text{ chung} \\ \dfrac{EM}{EA} = \dfrac{EC}{EM}(cmt) \end{cases} \Rightarrow \Delta ECM \backsim \Delta EMA(c-g-c) \Rightarrow EMC = EAM$. Mà $EAM = ADC$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và day cung và góc nội tiếp cùng chắn AC của (O))

Nên $EMC = ADC$. Nhưng hai góc này ở vị trí so le trong. Vậy AD // BM

$\Rightarrow DAB = ABM$. Mà $ADB = ABM$ (Góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và day cung chắn AB của (O))

Nên $ADB = DAB \Rightarrow \Delta ABD$ cân tại B.

c) <u>Gọi J là giao điểm của BO và đường tròn (O) (J khác B); K là giao điểm của AD và MJ. Tính tỉ số $\dfrac{KA}{KD}$</u>

<u>Cách 1:</u>

Gọi N là giao điểm của của BJ và AD.

Ta có: $BJ \perp AD$ tại N $\Rightarrow$ N là trung điểm của AD. $\Rightarrow AN = DN = \dfrac{AD}{2}$

Xét ΔJBM, ta có: NK // BM $\Rightarrow \dfrac{NK}{MB} = \dfrac{JN}{JB}$

Ta có : MA, MB là tiếp tuyến của đường tròn (O)

$\Rightarrow$ OM là phân giác của $AOB \Rightarrow MOB = \dfrac{1}{2}AOB$. Mà $AJN = \dfrac{1}{2}AOB$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn AB của (O)). Nên $AJN = MOB$

Xét ΔAJN và ΔMOB, ta có :

$\begin{cases} AJN = MOB(cmt) \\ ANJ = MBO(=90^0) \end{cases} \Rightarrow \Delta AJN \backsim \Delta MOB(g-g) \Rightarrow \dfrac{JN}{OB} = \dfrac{AN}{MB} \Rightarrow \dfrac{JN}{2OB} = \dfrac{AN}{2MB} \Rightarrow \dfrac{JN}{JB} = \dfrac{AN}{2MB}$

Ta có : $\dfrac{NK}{MB} = \dfrac{AN}{2MB}\left(= \dfrac{JN}{JB}\right) \Rightarrow NK = \dfrac{AN}{2} \Rightarrow AK = NK = \dfrac{AN}{2}$

Ta có : $\begin{cases} AK = NK(cmt) \\ AN = DN(cmt) \end{cases} \Rightarrow KD = 3KA \Rightarrow \dfrac{KA}{KD} = \dfrac{1}{3}$

<u>Cách 2:</u> Gọi T là giao điểm của JA và BM.

Chứng minh được : NA // BT $(\perp BJ)$. Và M là trung điểm của BT.

Dùng hệ quả Thales chứng minh được K là trung điểm của NA $\Rightarrow \ldots \Rightarrow \dfrac{KA}{KD} = \dfrac{1}{3}$

<u>Bài 6:</u> (2 điểm) Tìm tất cả các số tự nhiên n biết n có hai chữ số và n chia hết cho tích các chữ số của nó.

<u>Hướng dẫn:</u>

Giả sử $n = \overline{ab}$ (a, b là chữ số)

Theo đề bài ta có: $\overline{ab} \vdots ab \Rightarrow (10a + b) \vdots ab \Rightarrow 10ab + b^2 \vdots ab \Rightarrow b \vdots a$

Đặt $b = ma(m \in N; m < 10)$

Do đó : $\overline{ab} = 10a + b = 10a + ma$ chia hết cho ma^2. Nên $(10a) \vdots (ma) \Rightarrow 10 \vdots m \Rightarrow m \in \{1;2;5\}$

- Nếu m = 1 thì b = a. Ta có: $11a \vdots a^2 \Rightarrow 11 \vdots a \Rightarrow a = 1$

THĂNG LONG

Do đó : a = b = 1, ta cósố : $\overline{ab} = 11$

- **Nếu m = 2 thì b = 2a. Ta có số : 12 ; 24 ; 36 ; 48. Thử chọn, ta có các số 12 ; 24 ; 36 là thích hợp.**
- **Nếu m = 5 ta có : b = 5a $\Rightarrow b \vdots 5$. Nên b = 5 $\Rightarrow a = 1$. Số $\overline{ab} = 15$ (thích hợp)**

Vậy có 5 số thỏa mãn đầu bài, đó là : 11 ; 12 ; 15 ; 24 ; 36.

★ HẾT ★

THĂNG LONG